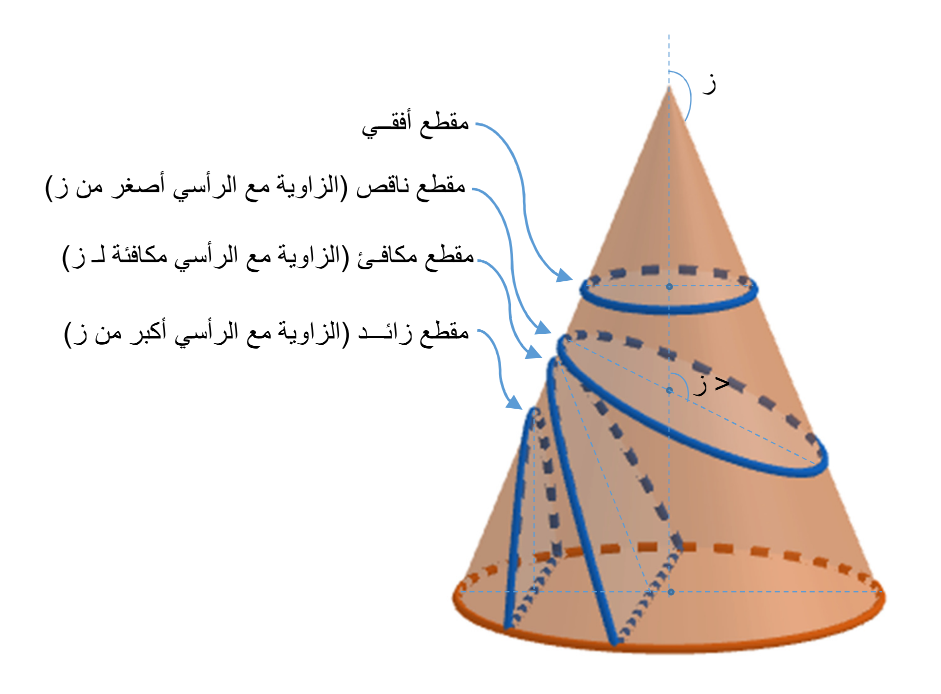
المقاطع المخروطية

الكاتب: عمر عبد السلام أبوستة.

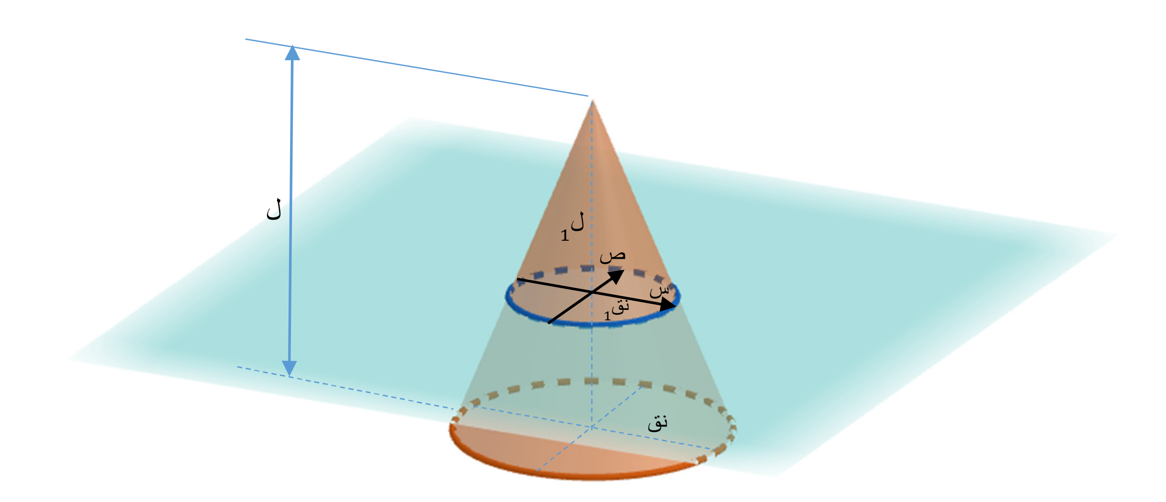
عندما يتقاطع سطح مستوي مع مخروط، فإنّ شكل منحنى التقاطع يعتمد على زاوية ميل السطح المستوي، كالتالي:



فهدفنا في هذا الكُتيب هو استنتاج العلاقات الرياضية التي تصف منحنيات هذه المقاطع، ولنبدأ بالمقطع الأفقي.

1- المقطع الأفقي:

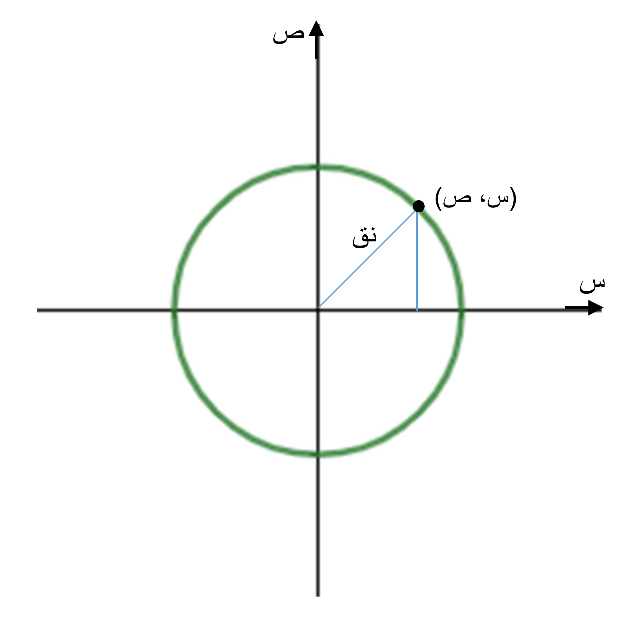
أولا علينا أن نحدّد المتغيرين الذَيْن سيمثلان العلاقة؛ ولنفرض أنّ س هو المتغير المستقل، وص هو المتغير التابع، ثم علينا تحديد المحاور التي ستمثل قيم كل من المتغيرين، ويجب علينا أن نضع المحاور بحيث يكون المنحنى متماثل حول محور المتغير التابع، أي متماثل حول محور ص؛ ليسهل علينا إيجاد العلاقة بين المتغيرين التي ستمثل المنحنى، ثم علينا إيجاد الخاصية التي يختص بها المقطع أو المنحنى، والتي من خلالها سوف نتمكّن من إيجاد العلاقة التي تمثل منحنى المقطع. فإذا حددنا المحاور على المقطع الأفقي كالتالي:



من أصل تعريف المخروط، أنه دائرة، مرتبط بكل نقطة على محيطها خط مستقيم واصل بينها وبين نقطة معينة (رأس المخروط)، الخط الواصل بين رأس المخروط وبين مركز الدائرة عمودي على سطح الدائرة. فمن تشابه المثلثات، نجد أنّ:

$$\frac{\text{نق}_1}{\text{نق}} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}} \qquad\qquad \text{نق}_1 = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}}\ \text{نق}$$

فإنّ العلاقة بين نق$_1$ ونق طردية، وبما أنّ نق ثابت لجميع النقاط على محيط القاعدة -إذ أنها دائرة- فكذلك يجب أن يكون حال نق$_1$؛ فإنّ المقطع المخروطي الأفقي ليس إلا دائرة. فإذا رسمنا المسقط الأفقي[1] لمحوري المتغيرين كالتالي:



[1] المسقط الأفقي للمحاور: يعني النظر بشكل عمودي على السطح المستوي الذي يقع فيه كِلا المحورين.

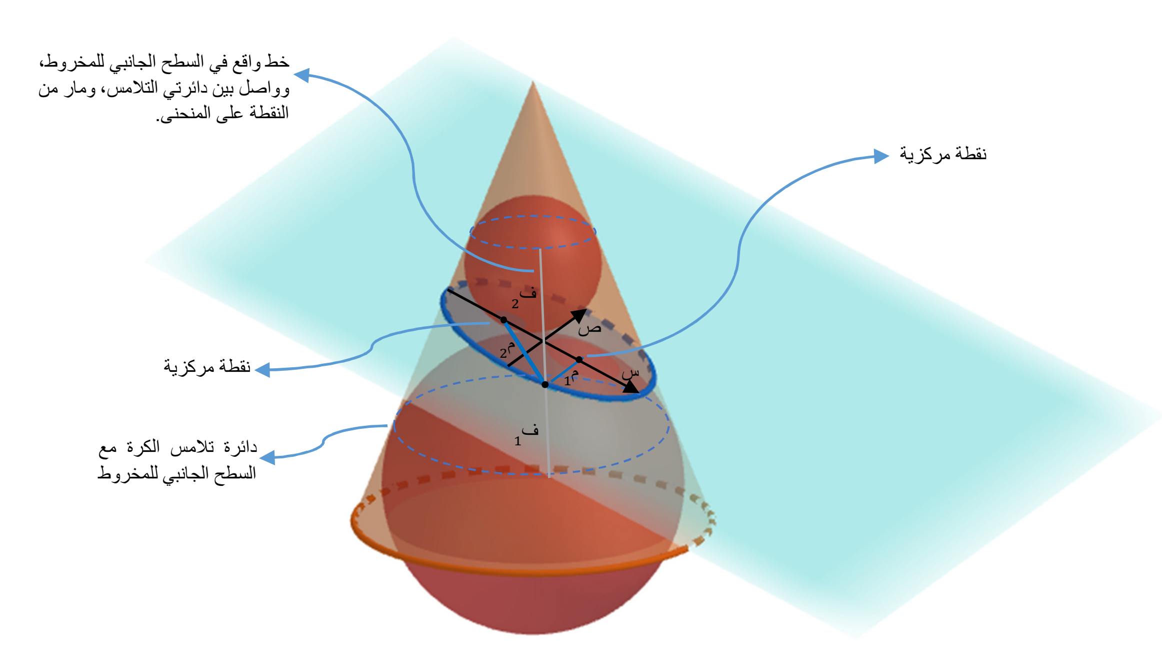
فإنّ خاصية هذا المنحنى (الدائرة) أن جميع النقاط عليه، تبعد مسافة ثابته (نق) عن مركزه، فبالتالي؛ لأي نقطة (س، ص) على منحناه، ينتج لنا مثلث قائم الزاوية كما بالرسم أعلاه، فمن نظرية فيتاغورس، نجد أنّ:

$$\text{نق}^2 = \text{ص}^2 + \text{س}^2$$

وهذه هي علاقة أو معادلة الدائرة، التي هي المقطع المخروطي الأفقي.

2- المقطع الناقص:

المقطع المخروطي الناقص هو منحنى تقاطع السطح الجانبي للمخروط مع سطح مستوي يميل بزاوية مع المحور الرأسي الموجب أقل من زاوية ميل السطح الجانبي للمخروط مع المحور الرأسي الموجب، ولإيجاد العلاقة التي تمثّله؛ أولا، علينا تحديد محاور المتغيرين (بحيث نضمن التماثل حول محور ص)، ثم علينا إيجاد الخاصية التي يختص بها المنحنى (وذلك باستغلال الحِيل الهندسية)، ثم يمكننا إيجاد علاقة المنحنى من خلال تلك الخاصية، فالحيلة الهندسية الموجودة هنا، تكمن في وضع كرتين داخل المخروط، بحيث احداهما تلامس السطح الداخلي للمخروط في دائرة وتلامس المقطع الناقص في نقطة من الأعلى، والأخرى تلامس المخروط في دائرة -أيضا- وتلامس المقطع الناقص في نقطة من الأسفل؛ كالتالي:



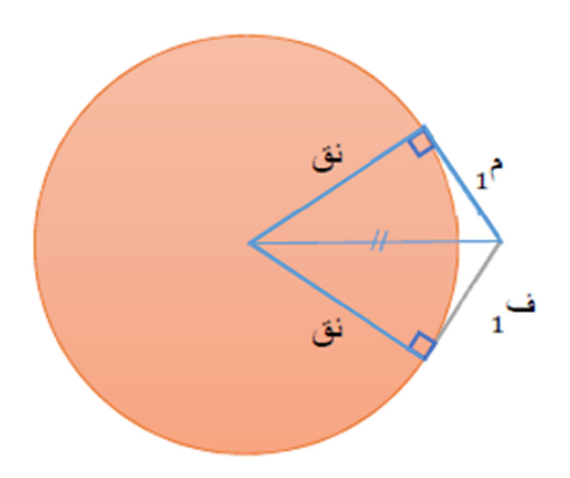
فإنّنا نحصل على نقطتين مركزيتين للمقطع الناقص، وعند ذلك يمكن فرض المحاور، بحيث أنّ محور س يقطع المركزين، وأنّ محور ص يبعد عنهما مسافتان متساويتان؛ ليتحقّق التماثل حول محور ص.

عند ذلك؛ فإنّ أي نقطة على المنحنى تبعد مسافة معينة عن كل من المركزين (م_1، م_2). ونلاحظ كذلك أنّ الخط الواقع في السطح الجانبي للمخروط، الواصل بين الدائرتين والمار بالنقطة على

المنحنى، طوله ثابت، بغض النظر عن موقع النقطة على المنحنى، فإذا فرضنا أنّ المسافة من الدائرة السفلية إلى النقطة هي ف$_1$ والمسافة بين النقطة والدائرة العلوية هي ف$_2$، فإنّ:

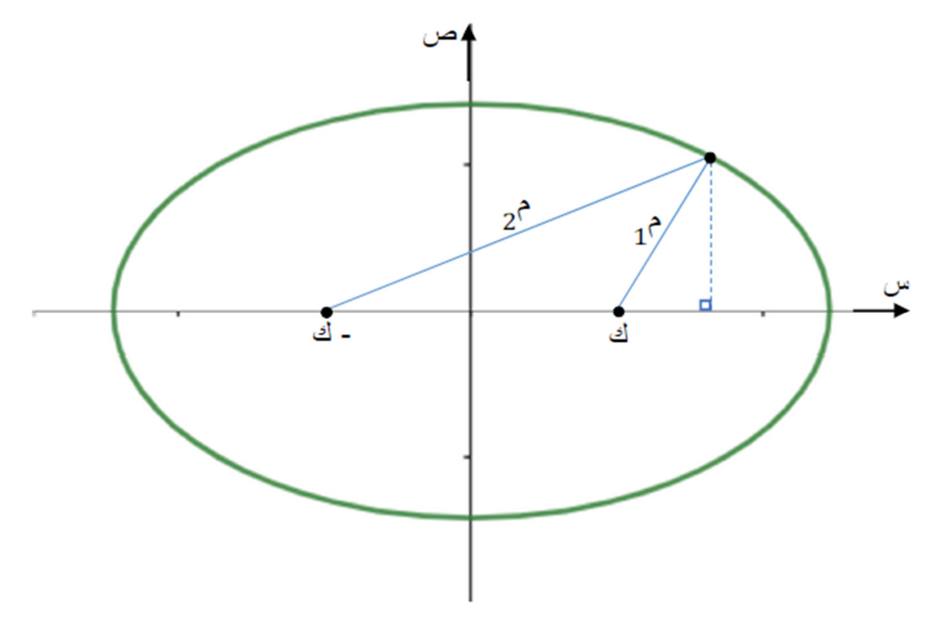
$$ف_1 + ف_2 = ث$$

بحيث أنّه إذا تحرّكت النقطة إلى يمين المنحنى؛ فإنّ ف$_1$ تقِل، وف$_2$ تزيد؛ بحيث أنّ مجموعهما يبقى ثابتا، والعكس صحيح. فما هي العلاقة بين ف$_1$ وم$_1$؟ يظهر أنّ كلاهما مماسي للكرة السفلية، ويتقاطعان في نفس النقطة، فإذا رسمنا المسقط الأفقي لهما؛ كالتالي:



فإنّنا نجد أنهما ضلعان لمثلثين متطابقين، فهما متساويان؛ فإنّ م$_1$ = ف$_1$ ، وكذلك م$_2$= ف$_2$ لنفس السبب.

إذن، فإنّ الخاصية التي يختص بها منحنى المقطع الناقص هي أنّ مجموع المسافتين من كل مركز إلى النقطة على المنحنى ثابت .فإذا رسمنا المسقط الأفقي للمقطع الناقص كالتالي:

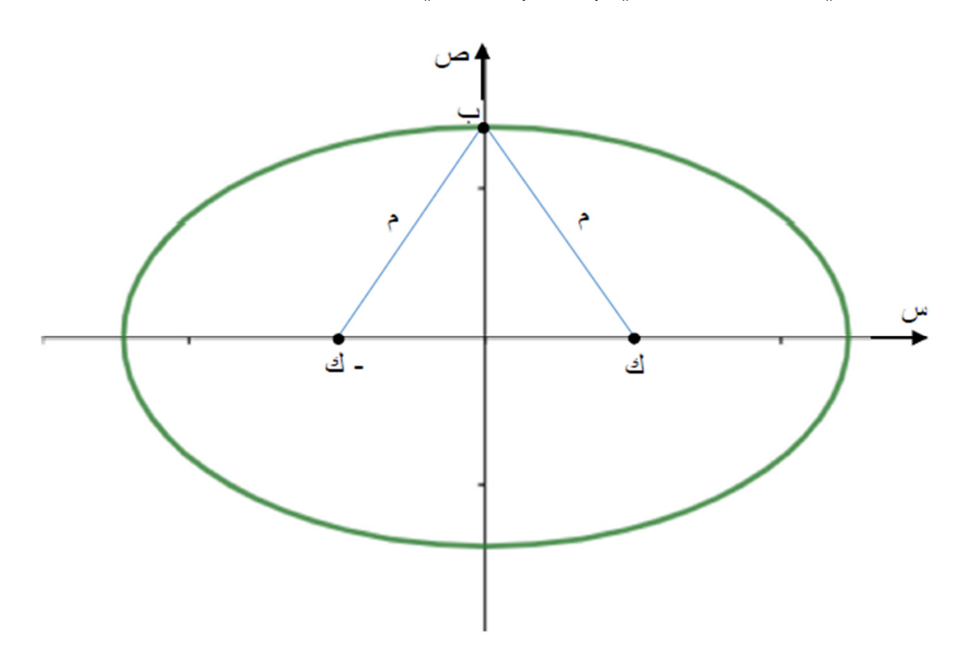


نلاحظ تكوّن مثلثين قائمي الزاوية عند النقطة، فمن خلال نظرية فيتاغورس؛ نجد أنّ:

$$\text{م}_1^2 = \text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2$$

$$\text{م}_2^2 = \text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2$$

وإذا كانت النقطة التي على المنحنى هي (0، ب)، كالتالي:



فإنّ $\text{م}_1 = \text{م}_2$ ، وإذا اعتبرنا كل منهما تساوي م؛ فإنّ: ث = 2 م.

وبما أنّ:

$$\text{م}_1 + \text{م}_2 = \text{ث}$$

بالتعويض عن كل ما سبق في هذه المعادلة، نجد أنّ:

$$\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2} + \sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2} = 2\,\text{م}$$

$$\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2} = 2\,\text{م} - \sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2}$$

بتربيع الطرفين، وفك الأقواس:

$$\text{ص}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{س ك} + \text{ك}^2 = 4\text{م}^2 - 4\text{م}\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2} + \text{ص}^2 + \text{س}^2 + 2\,\text{س ك} + \text{ك}^2$$

$$4\text{م}\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2} = 4\text{م}^2 + 4\,\text{س ك}$$

بتربيع الطرفين، وفك القوس، وتوزيع 2 م:

$$16\,\text{م}^2\text{ص}^2 + 16\,\text{م}^2\text{س}^2 + 32\,\text{س ك م}^2 + 16\,\text{م}^2\text{ك}^2 = 16\,\text{م}^4 + 32\,\text{س ك م}^2 + 16\,\text{س}^2\text{ك}^2$$

بنقل الحدود المتشابهة إلى جانب بعضها البعض:

$$\text{م}^2\text{ص}^2 + \text{م}^2\text{س}^2 - \text{س}^2\text{ك}^2 = \text{م}^4 - \text{م}^2\text{ك}^2$$

بأخذ س^2 وم^2 عاملان مشتركان:

$$\text{م}^2\text{ص}^2 + \text{س}^2\left(\text{م}^2 - \text{ك}^2\right) = \text{م}^2\left(\text{م}^2 - \text{ك}^2\right)$$

من الرسم السابق؛ نجد أنّ: $\text{م}^2 - \text{ك}^2 = \text{ب}^2$؛ فبالتعويض:

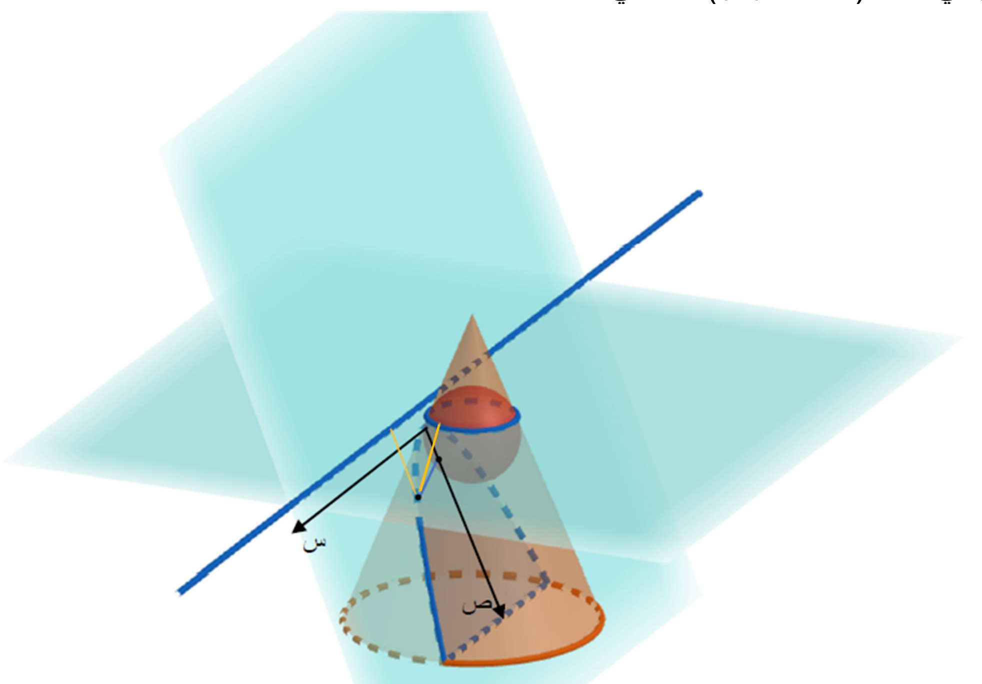
$$\text{م}^2\text{ص}^2 + \text{س}^2\text{ب}^2 = \text{م}^2\text{ب}^2$$

وبضرب المعادلة في $\frac{1}{\text{م}^2\text{ب}^2}$:

$$\boxed{\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{م}^2} = 1}$$

3- المقطع المكافئ:

في حال وضعنا كرة داخل المخروط، بحيث تلامس سطح المخروط في دائرة، وتلامس المقطع المكافئ في نقطة (نقطة المركز)، كالتالي:

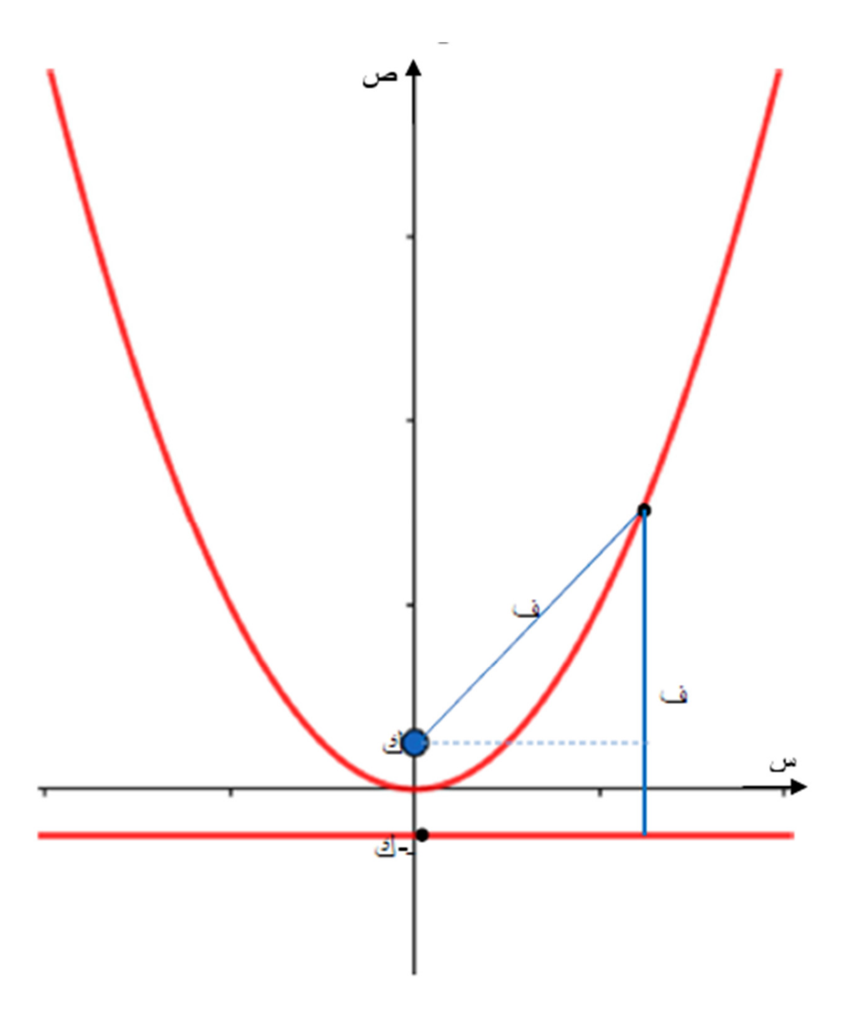


وإذا فرضنا أنّ المسافة بين المركز وأي نقطة على المنحنى (م)، وإذا فرضنا أنّ أحد الخطوط الصفراء يقع في السطح الجانبي للمخروط، ويصل النقطة بدائرة التلامس، وأنّ الآخر يقع في السطح الذي يقع فيه المقطع المكافئ، ويصل النقطة بخط تقاطعه مع السطح المستوي الأفقي الذي تقع فيه دائرة التلامس . فإنّ م تساوي الخط الأصفر الذي على السطح الجانبي للمخروط، لأنّها خطين متقاطعين في نقطة ومماسيين لنفس الكرة .وإنّ الخطين الأصفرين متساويان لأنّهما يميلان بنفس الزاوية مع الرأسي، ويتقاطعان في نقطة ولهما نفس الارتفاع، فإنهما يشكلان مثلثين متطابقين قائمي الزاوية كالتالي:



وأيضا نلاحظ أنّ بُعد خط التقاطع عن النقطة (0، 0) يساوي قيمة ص لنقطة المركز (ك).

فيمكننا رسم المسقط الأفقي للمقطع المكافئ كالتالي:



فهذه هي الخاصية التي يختص بها المقطع المكافئ؛ من خلالها نجد العلاقات التالية:

$$ف^2 = (ص - ك)^2 + س^2$$

$$ف = ص + ك$$

بالتعويض عن ف:

$$(ص + ك)^2 = (ص - ك)^2 + س^2$$

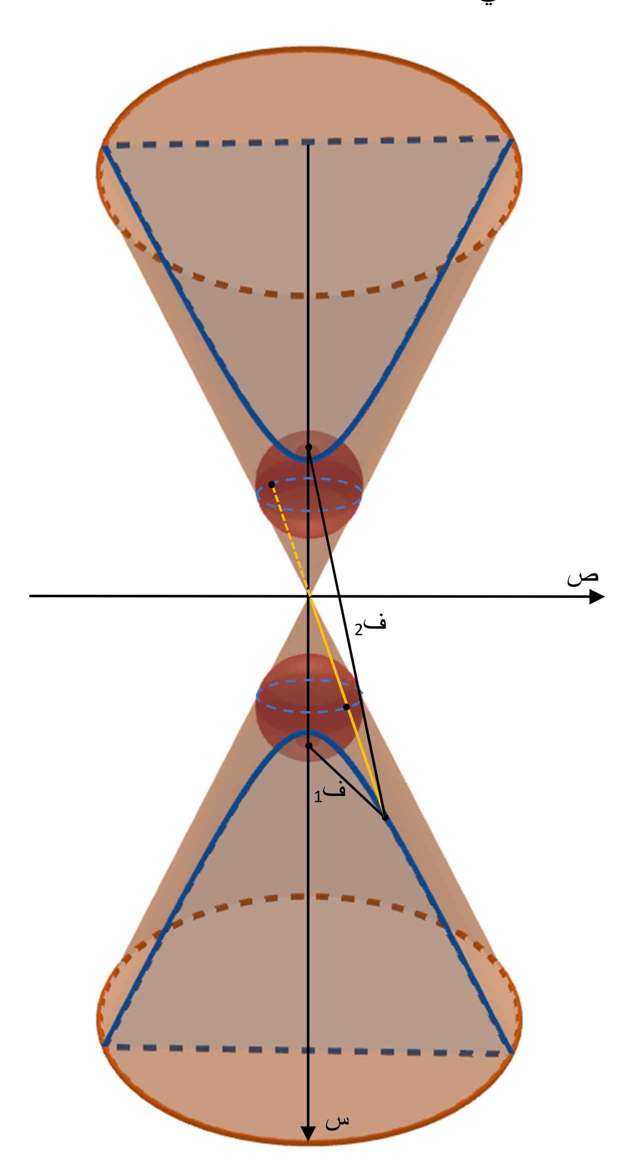
$$ص^2 + 2\ ص\ ك + ك^2 = ص^2 - 2\ ص\ ك + ك^2 + س^2$$

فنجد ص كدالة في س:

$$\boxed{ص = \frac{س^2}{4\ ك}}$$

4- المقطع الزائد:

في حال تقاطع سطح مستوي مع السطح الجانبي للمخروط، وكان يميل بزاوية -مع المحور الرأسي الموجب- أكبر من زاوية السطح الجانبي للمخروط، لنقل أنها 180°، فيمكن إيجاد العلاقة الممثلة للمنحنى؛ باستغلال الحيلة الرياضية التي تكمن في إضافة نسخة أخرى للمخروط تقابل المخروط الأصلي رأسيا كما بالشكل التالي:

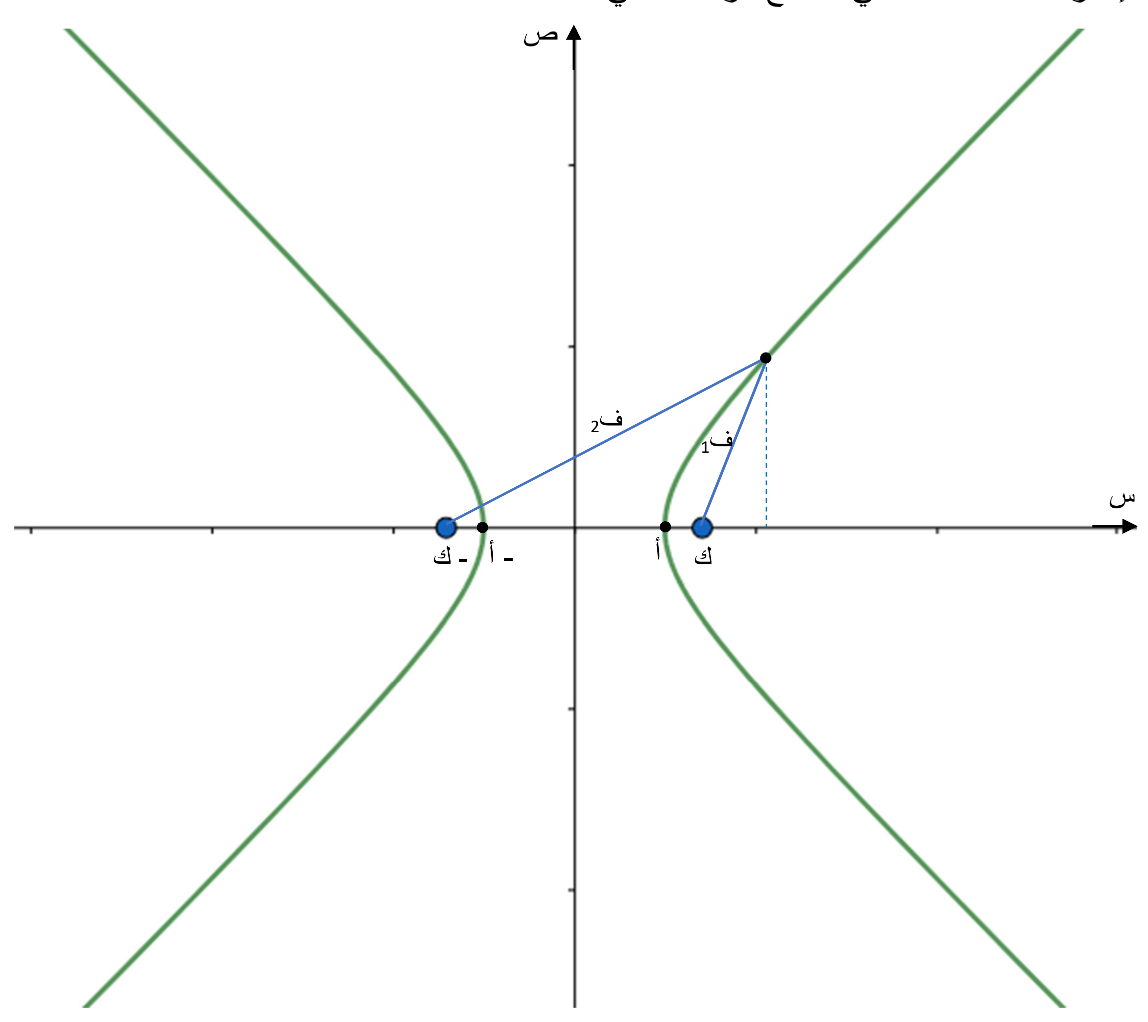


وبوضع كرتين كل منهما تلامس احدى جُزئي المقطع الزائد، وتلامس السطح الجانبي للمخروط في دائرة؛ نحصل على نقطتين مركزيتين، وتبعدان مسافتان معينتان عن أي نقطة على المنحنى (ف$_1$، ف$_2$)، فإذا كان الخط الأصفر يقع في السطح الجانبي للمخروط (الجزء المُنقّط يقع في الجهة الأخرى للمخروط)، ويصل بين النقطة التي على المنحنى والدائرتين؛ فإنّ الجزء الواصل منه بين الدائرتين

طوله ثابت (ث)، والباقي مساوي لـ ف_1، لأنهما خطان يتقاطعان في نقطة ومماسيان لنفس الكرة، فإنّ طول الخط الأصفر يساوي $\text{ف}_1 + \text{ث}$، والخط الأصفر بأكمله مساوي لـ ف_2، لنفس السبب، فإنّ:

$$\text{ف}_1 + \text{ث} = \text{ف}_2 \quad \leftarrow \quad \text{ف}_2 - \text{ف}_1 = \text{ث}$$

فإذا رسمنا المسقط الأفقي للمقطع الزائد كالتالي:



نجد أنّ:

$$\text{ف}_1^2 = \text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2$$

$$\text{ف}_2^2 = \text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2$$

وإذا كانت النقطة على المنحنى هي (أ، 0)؛ فإنّنا نجد أنّ: ث = 2 أ.

وبالتعويض في $(\text{ف}_2 - \text{ف}_1 = \text{ث})$، كالتالي:

$$\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2} - \sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2} = 2\,\text{أ}$$

$$\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} + \text{ك})^2} = 2\text{أ} + \sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2}$$

بتربيع الطرفين، وفك الأقواس:

$$\text{ص}^2 + \text{س}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ك} + \text{ك}^2 = 4\text{أ}^2 + 4\text{أ}\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2} + \text{ص}^2 + \text{س}^2 - 2\,\text{س}\,\text{ك} + \text{ك}^2$$

$$4\,\text{س}\,\text{ك} - 4\text{أ}^2 = 4\text{أ}\sqrt{\text{ص}^2 + (\text{س} - \text{ك})^2}$$

بتربيع الطرفين، وفك الأقواس:

$$16\,\text{س}^2\text{ك}^2 - 32\,\text{س}\,\text{ك}\,\text{أ}^2 + 16\,\text{أ}^4 = 16\,\text{أ}^2\text{ص}^2 + 16\,\text{أ}^2\text{س}^2 - 32\,\text{س}\,\text{ك}\,\text{أ}^2 + 16\,\text{أ}^2\text{ك}^2$$

بنقل الحدود المتشابهة إلى جانب بعضها البعض:

$$\text{س}^2\text{ك}^2 - \text{أ}^2\text{س}^2 = \text{أ}^2\text{ك}^2 - \text{أ}^4$$

بأخذ س^2 وأ^2 عاملان مشتركان:

$$\text{س}^2(\text{ك}^2 - \text{أ}^2) = \text{أ}^2\text{ص}^2 + \text{أ}^2(\text{ك}^2 - \text{أ}^2)$$

بضرب المعادلة في $\frac{1}{\text{أ}^2(\text{ك}^2 - \text{أ}^2)}$:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{(\text{ك}^2 - \text{أ}^2)} = 1$$

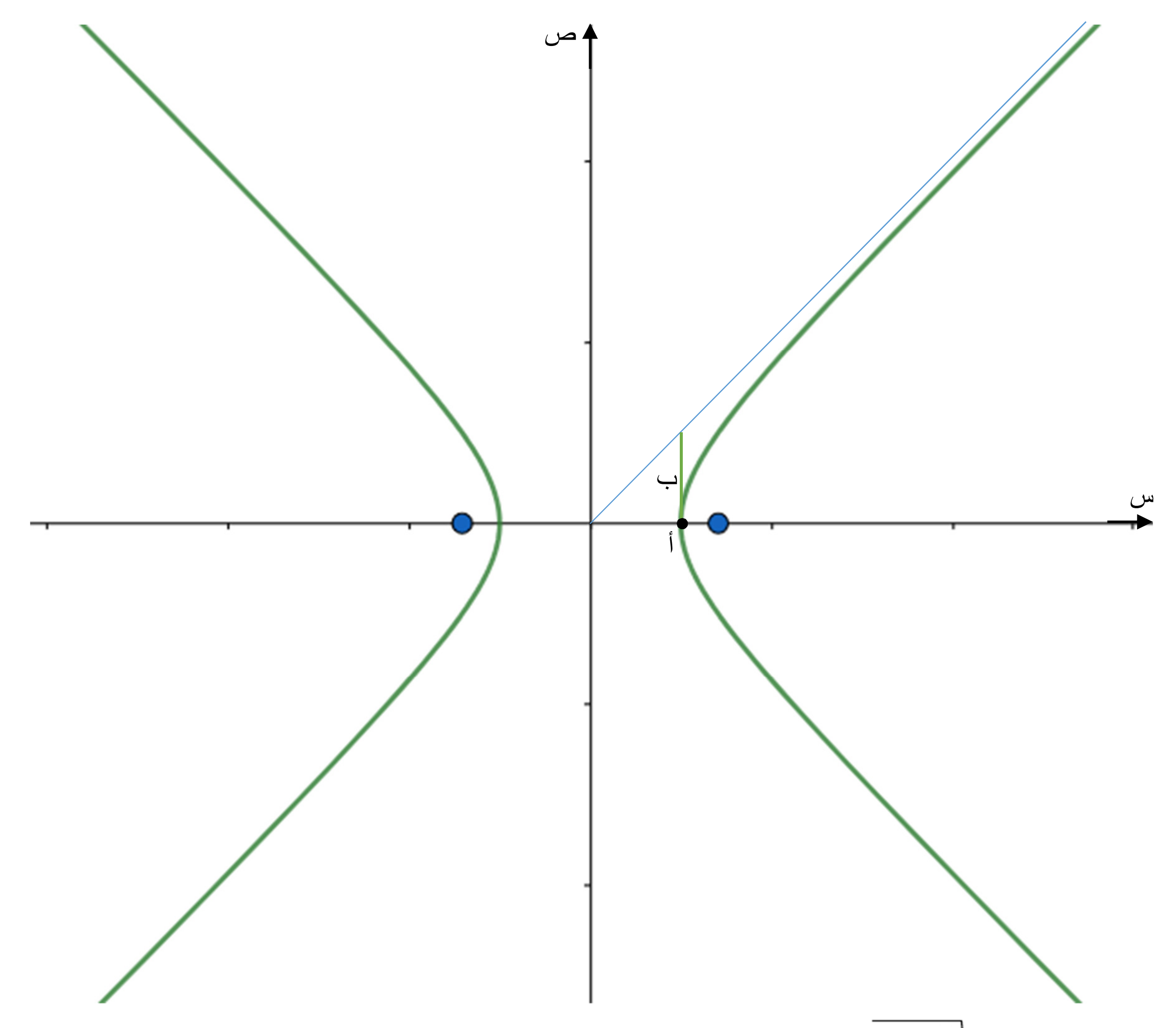
ويمكن وضع ص كدالة في س كالتالي:

$$\text{ص}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{ك}^2 - \text{أ}^2}}{\text{أ}}\sqrt{\text{س}^2 - \text{أ}^2}$$

وعندما تكون قيمة س كبيرة جدا؛ يمكن إهمال الـ (أ^2)؛ فتصبح الدالة:

$$\text{ص}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{ك}^2 - \text{أ}^2}}{\text{أ}}\,\text{س}$$

وهي خط التقارب الذي يقترب منه المقطع الزائدي عند الما لا نهاية، ورسمه كالتالي:



حيث يظهر أنّ $\sqrt{ك^2 - أ^2}$ تُمثل فرق الصادات للخط المستقيم عند النقطة أ؛ فيمكن أن نسميها ب، ونعوّض عنه بها؛ فتصبح علاقة المقطع الزائدي كالتالي:

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$